

Theorem 3. *Let (M, g) be an n -dimensional ($n \geq 2$) complete, simply connected symmetric space. If (M, g) is irreducible and its scalar curvature is positive, then there are no non-zero harmonic p -forms ($1 \leq p \leq n - 1$) on (M, g) .*

Our work was supported by RBRF grant 16-01-00756-a (Russia).

References

1. Tachibana S. *On conformal Killing tensor in a Riemannian space*// Tohoku Math. Journal –1969. –V. 21. – С. 56–64.
2. Stepanov S. E., Tsyganok I. I., Dmitrieva T. V. *Harmonic and conformal Killing forms on complete Riemannian manifold* // Russian Math. –2017. –V. 61. – № 3. – С. 44–48.
3. Duchesne B. *Infinite dimensional Riemannian symmetric spaces with fixed-sing curvature operator* // Ann. Inst. Fourier, Grenoble – 2015. –V. 65. – № 1. – С. 211–244.

О КОНФОРМНО КИЛЛИНГОВЫХ И ГАРМОНИЧЕСКИХ ФОРМАХ НА РИМАНОВЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

С.Е. Степанов, Т.В. Дмитриева

Мы доказываем, что не существует ненулевых замкнутых и козамкнутых конформно киллинговских L^2 -форм на полном односвязном неприводимом римановом симметрическом многообразии с отрицательной скалярной кривизной. Также доказываем, что не существует гармонических L^2 -форм на полном односвязном неприводимом римановом симметрическом многообразии с положительной скалярной кривизной.

Ключевые слова: Риманово симметрическое пространство, гармонические формы, замкнутые и козамкнутые конформно киллинговые формы.

UDC 514.822

ON INFINITESIMAL HARMONIC TRANSFORMATIONS ON COMPLETE RIEMANNIAN MANIFOLDS

S.E. Stepanov¹, I.I. Tsyganok²

¹ s.e.stepanov@mail.ru; Financial University at the Government of the Russian Federation

² i.i.tsyganok@mail.ru; Financial University at the Government of the Russian Federation

We prove that every infinitesimal harmonic transformation with finite kinetic energy on a complete Riemannian manifold with non-positive Ricci curvature is parallel. We apply this fact to the Ricci soliton theory.

Keywords: Complete Riemannian manifold, infinitesimal harmonic transformation, Ricci soliton.

A vector field ξ on a complete Riemannian manifold (M, g) is called an infinitesimal harmonic transformation if ξ generates a flow which is a local one-parameter group of harmonic transformations [1].

The kinetic energy of the flow (see [2, p. 2]) on a complete Riemannian manifold (M, g) generated by a complete vector field ξ is determined by the following equation $E(\xi) = \frac{1}{2} \int_M \|\xi\|^2 dVol_g$. Using the above definition we can prove the following theorem.

Theorem. *Let (M, g) be a complete Riemannian manifold with non-positive Ricci curvature. Then every infinitesimal harmonic transformation with finite kinetic energy is parallel. If, in addition, the volume of (M, g) is infinite or the Ricci curvature is negative at some point of (M, g) , then the infinitesimal harmonic transformation is identically zero.*

The triplet (g, ξ, λ) is called a Ricci soliton on a manifold M (see [3, p. 22]) if the Ricci tensor Ric of g satisfies the equation $-2Ric = L_\xi g + 2\lambda g$ where $L_\xi g$ is the Lie derivative of g with respect to ξ and λ is a constant. Moreover, the vector field ξ of a Ricci soliton (g, ξ, λ) is an infinitesimal harmonic transformation of the manifold (M, g) (see [4]). Therefore, the following corollary holds.

Corollary. *Let (g, ξ, λ) be a Ricci soliton with complete Riemannian metric g such that the Ricci curvature of g is nonpositive and the kinetic energy of the flow generated by ξ is finite, then (g, ξ, λ) is not shrinking. If, in addition, (g, ξ, λ) is steady then g is a Ricci-flat metric and if (g, ξ, λ) is expanding then it is trivial.*

Our work was supported by RBRF grant 16-01-00053-a (Russia).

References

1. Stepanov S. E., Shandra I. G. *Geometry of infinitesimal harmonic transformation* // Annals of Global Analysis and Geometry –2003. –V. 24. – С. 291–29.
2. Arnold V. I., Kresin B. A. *Topological methods in hydrodynamics* // Springer-Verlag, New York –1998.
3. Chow B., Knopf D. *The Ricci flow: An introduction* // American Mathematical Society, Providence –2004.
4. Stepanov S. E., Shelepova V. N. *A note on Ricci soliton* // Mathematical Notes –2009. –V. 86. – № 3. – С. 447–450.

ОБ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ПОЛНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

С.Е. Степанов, И.И. Цыганок

Доказывается, что каждое инфинитезимальное гармоническое преобразование с конечной энергией на полном римановом многообразии с неположительной кривизной Риччи является параллельным векторным полем. Дается приложение этого утверждения в теории солитонов Риччи

Ключевые слова: Полное риманово многообразие, инфинитезимальное гармоническое преобразование, солитон Риччи.

УДК 514.763

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЯ ЭЙЗЕНХАРТА И H -ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА {221}

А.В. Аминова¹, Д.Р. Хакимов²

¹ asya.aminova@kpfu.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

² dzhamoliddink@mail.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В данной работе с помощью метода косономального репера (Аминова) интегрируются уравнения Эйзенхарта и находятся пятимерные h -пространства типа {221}.